

O PROBLEMĂ ... MAI MULTE SOLUȚII

Prof. Tatiana Cristea

Colegiul Național "Nicolae Titulescu", Craiova

Vom prezenta câteva tehnici de lucru pentru a determina un parametru astfel încât două ecuații, dintre care cel puțin una este de grad superior, să admită cel puțin o rădăcină comună.

1. Să se determine parametrul real a pentru care ecuațiile $X^2 + X + a = 0$ și $X^3 - aX - 3 = 0$ au o rădăcină comună.

Metoda 1. (Algoritmul lui Euclid)

Fie $f(X) = X^2 + X + a$ și $g(X) = X^3 - aX - 3$. Dacă polinoamele f și g au o rădăcină comună, atunci trebuie ca cel mai mare divizor comun al acestor polinoame să fie de gradul întâi, acesta reprezentând ultimul rest nenul în algoritm. Trebuie deci ca restul de grad zero (termenul liber) să fie zero. Împărțind polinomul g la f obținem câtul $X - 1$ și restul $(1 - 2a)X + a - 3$. Continuăm algoritmul și împărțind pe f la rest, obținem restul de grad zero și acesta trebuie să fie zero, deci $a(1 - 2a)^2 - (a - 3)(4 - 3a) = 0$. De aici se obține ecuația $4a^3 - a^2 - 12a + 12 = 0$, cu soluția unică reală $a = -2$. Ultimul rest nenul, pentru $a = -2$, devine $5X - 5 = 0$, cu rădăcina $x = 1$, aceasta reprezentând rădăcina comună celor două ecuații iar $a = -2$ este valoarea căutată.

Metoda 2. (metoda eliminării parametrului)

Fie α rădăcina comună celor două ecuații, deci $x = \alpha$ verifică ecuațiile :

$$\alpha^2 + \alpha + a = 0 \text{ și } \alpha^3 - a\alpha - 3 = 0. \quad (1)$$

Ideea este de a găsi o ecuație pe care o verifică α , ecuație care să nu conțină parametrul a , ceea ce revine la eliminarea lui a între cele două relații (1). Cum $a = -\alpha^2 - \alpha$ a doua relație devine : $2\alpha^3 + \alpha^2 - 3 = 0$, singura soluție reală a ecuației este $\alpha = 1$, (rădăcina comună celor două ecuații), pentru care se obține $a = -2$.

Metoda 3. (metoda identificării)

Fie α rădăcina comună celor două ecuații, atunci au loc relațiile :

$$X^2 + X + a = (X - \alpha)(X - \beta) \text{ și } X^3 - aX - 3 = (X - \alpha)(X^2 + mX + n) \text{ sau}$$

$$X^2 + X + a = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta \text{ și } X^3 - aX - 3 = X^3 + (m - \alpha)X^2 + (n - m\alpha)X - n\alpha, \text{ iar de aici prin identificarea coeficienților polinoamelor egale se obține sistemul :}$$

$$\alpha + \beta = -1$$

$$\alpha\beta = a$$

$$m - \alpha = 0$$

$$n - m\alpha = -a$$

$$n\alpha = 3, \text{ cu soluția } \alpha = m = 1, n = 3, \beta = -2, a = -2. \text{ Deci pentru } a = -2 \text{ rădăcina comună este } x = 1.$$

Metoda 4. (relațiile lui Viète)

Fie x_1, x_2 rădăcinile primei ecuații, iar x_1, x_3, x_4 rădăcinile celei de-a doua ecuații. Scriem relațiile lui Viète pentru cele două ecuații și avem :

$$x_1 + x_2 = -1$$

$$x_1 x_2 = a$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_3 x_4 = -a$$

$x_1x_3x_4=3$, scriem a patra relație sub forma $x_1(x_3+x_4) + x_3x_4 = -a$, (1) iar a treia și ultimele sub formele : $x_3+x_4=-x_1$, $x_3x_4 = \frac{3}{x_1}$, cu acestea (1) devine $-x_1^2 + \frac{3}{x_1} = -a$, (2). Ținând seama de $x_1x_2 = a$ și $x_2 = -1 - x_1$, (2) se rescrie $-x_1^2 + \frac{3}{x_1} = -x_1(-1 - x_1)$ sau $2x_1^3 + x_1^2 - 3 = 0$, ecuație ce are ca singură soluție reală $x_1 = 1$. Din (2) rezultă $a = -2$ și apoi din $x_1x_2 = a$ se obține $x_2 = -2$. A doua ecuație are rădăcina $x_1 = 1$ și soluțiile $x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2}$, deci pentru $a = -2$ ecuațiile au rădăcina comună $x = 1$.

2. Să se determine parametrii reali m și n astfel încât ecuația $x^4 - x^3 - mx^2 - x + n = 0$ să aibă rădăcina dublă $x = 1$ și să se rezolve ecuația dată.

Metoda 1.

Dacă $x = 1$ este rădăcină dublă a polinomului $f = x^4 - x^3 - mx^2 - x + n$, atunci acesta este divizibil cu $(x - 1)^2$, deci restul împărțirii lui f la $(x - 1)^2$ este zero, adică $-2mx + n + m + 1 = 0$ este polinomul nul, deci coeficienții sunt zero, $m = 0$ și $n = 1$. Celelalte rădăcini sunt soluțiile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, adică $x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Metoda 2. (schema lui Horner)

Cerem ca $x = 1$ să fie rădăcină dublă, deci cele două resturi să fie zero.

	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	1	-1	-m	-1	n
1	1	0	-m	-1-m	-m + n - 1 = 0
1	1	1	1-m	-2m = 0	

Obținem $m = 0$ și $n = 1$, iar celelalte rădăcini sunt soluțiile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, adică $x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Metoda 3. (metoda identificării)

Dacă $x = 1$ este rădăcină dublă a ecuației, atunci trebuie să avem egalitatea :

$x^4 - x^3 - mx^2 - x + n = (x-1)^2(x^2 + ax + b)$. Efectuând calculele și identificând coeficienții obținem sistemul :

$$a - 2 = -1$$

$$b - 2a + 1 = -m$$

$$a - 2b = -1$$

$$b = n, \text{ rezultă } a = 1, b = 1, m = 0, n = 1.$$

Metoda 4. (utilizând derivatele)

Dacă f are rădăcina dublă $x = 1$ atunci $f(1) = 0$ și $f'(1) = 0$, deci $1 - 1 - m - 1 + n = 0$ și $4 - 3 - 2m - 1 = 0$ și obținem aceleași rezultate.

Metoda 5. (relațiile lui Viete)

Asociem ecuației relațiile lui Viete :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = -n$$

$$(x_1 + x_2)x_1x_2 + x_3x_4(x_3 + x_4) = 1$$

$x_1x_2x_3x_4 = n$, și înlocuind pe $x_1 = x_2 = 1$ obținem : $x_3 + x_4 = -1$, $x_3x_4 = 1 - m$, $x_3x_4 = 1$ și $x_3x_4 = n$, deci $m = 0$ și $n = 1$. Pentru a găsi rădăcinile x_3 și x_4 , rezolvăm sistemul : $x_3 + x_4 = -1$

$$x_3x_4 = 1, \text{ adică ecuația } x^2 + x + 1 = 0, \text{ deci } x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$